「資料の活用」領域での教材研究（その２）
── 中学 2, 3 学年 数学での新学習指導要領への対応 ──

A research on teaching the field “active use of data” (Part 2)
── corresponding to mathematics in the new course of study for second and third grade students of junior high school ──

木 下 淳 子　　KINOSHITA Junko　　(海南市立下津第一中学校)
門 田 良 信　　KADOTA Yoshinobu　　(和歌山大学教育学部数学教室)

(2010 年 10 月 5 日 受理)

概要:　新学習指導要領は, 中学校では平成 24 年度から実施され, 現在移行措置が行われている。数学では従来の領域「数量関係」が「関数」,「資料の活用」の 2 つに分割され, 知識や技能の活用を重視する内容となった。新しい「資料の活用」の授業を円滑に行うために, 教科書と移行措置用の補助教材を使って, 授業で出会う問題点を考えて教材研究を行うことがここでの目的である。すでに 1 学年の内容については木下・門田 [7] で考えたので, ここでは 2, 3 学年の内容を考察する。

この領域では様々な現象を直接扱う方法が主題となっていて, 他の領域の数学とは異なる要素を含んでいる。教材の選択, 考え方や感じ方の違い, 言葉による表現の仕方, 面倒な計算など, 授業を展開する上で多様な配慮や注意が必要となる。同時に, 教科書等の周辺にある興味深い問題を紹介することによって, この領域のもつ独特な魅力を感じてもらうことも意図している。

キーワード:　新学習指導要領, 中学校数学, 資料の活用, 確率, 全国学力テスト, 全数調査, 標本調査, 乱数

1.　はじめに

平成 24 年度に実施される新学習指導要領 [4] の中学校数学では, 従来の領域「数量関係」が 2 つに分かれて, 新領域は「数と式」,「図形」,「関数」,「資料の活用」の 4 つとなった。教育目標では,「表現する能力」や「数学的活動」が重視された。特に後者については, 2, 3 学年では次のように述べられている。

「(上記 4 領域) の学習やそれらを相互に関連付けた学習において, 次のような数学的活動に取り組む機会を設けるものとする。

ア. 既習の数学を基にして, 数や図形の性質などを見いだす活動
イ. 日常生活や社会で数学を利用する活動
ウ. 数学的な表現を用いて, 根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動 」

また, 1 学年の活動でもこれによく似た表現がある。学習指導要領解説 [5] では「資料の活用」の内容について次のように述べている。

第 1 学年では，目的に応じて資料を収集して整理し，ヒストグラムや代表値を用いて資料の傾向を読み取ることを学習。

第 2 学年では，多数回の試行を行って資料を集めることにより，不確定な事象の起こりやすさに一定の傾向があることを調べる活動を通して，確率について学習。

第 3 学年では，これらの学習の上に立って，母集団の一部分を標本として抽出する方法や，標本の傾向を調べることで，母集団の傾向が読み取れることを理解できるようにすること。

平成 11 年以前の学習指導要領でもこれに似た内容の学習が行われていた。今回の改訂がそれと異なるのは, 主として上記の (イ) や (ウ) に関連して提示されたことにある。「活用」という言葉はその意味で使われていると思われる。

学習指導要領の改定の背景に PISA や TIMSS の結果がある。細々と言及するつもりはないが, 日本の子どもは数学の応用力に問題を残していることになる。文部科学省が行う全国学力・学習状況調査（全国学力テスト）の問題を見ると, 応用力に配慮した PISA 風の問題が目に付く。また, 学力があっても「算数・数学が嫌い。」と答える子どもが多いことも, 教師としては考えるべき大きな課題である。

以上のことに留意しながら, この論文では,「資料の活用」の授業を円滑に行うために, 補助教材と教科書を読みながら, 授業で出会う問題点を考え, 教材研究を行うことにある。合わせて, 教科書等の周辺にある興味深い問題を取り上げて面白さを訴えたい。

ただし, 1 学年の内容については同様の主旨ですでに木下・門田 [7] で考えたので, 次の第 2 節以下では 2, 3 学年の内容を考察する。

「資料の活用」領域の内容を一読すると, 他の領域とは異なる要素を含んでいると思われる。特に 1 学年と 3 学年の統計的な内容には, 次に挙げるような要素が見られる。

(1) 数学では公式を見つけたり, 様々な条件の裏に隠れている真実（多くの場合唯一の解）を導くことが主な目的となる。
しかし, ここでは分かりやすい表やグラフの作り方や代表値のとり方, あるいは母集団から標本をとるための乱数の使い方などの方法を学ぶことが主となる。それを適用する範囲は様々な資料に及ぶ。また, その結果も目的によって変わりうるので決して 1 つの正しい解が得られる訳ではない。

(2) 「活用」ということでは, 結果を得た上でそれのもつ意味を考える必要がある。例えば, 資料の中で平均や中央値の意味を考察したり, ヒストグラムや母集団の様子を説明したりする能力が要求されている。
この場合には数学的能力の他に, 様々な問題に対応できる柔軟な思考力や言葉による表現力なども必要とされる。

(3) 中学数学の 4 分野にはそれぞれ基礎になる専門用語があるが, この分野の用語は数が多く, 概念も単純とは言えないものもある。そのことで生徒がとまどったり, とっつき難いと思わないように配慮する必要がある。

(4) 学習の過程で, 同種の手順や計算を何回も行う作業が多い。単純で長い計算をする場合には電卓やコンピュータを用いるべきである。補助教材では手計算でもできるように配慮されている。長い計算をさせることによって, 生徒が「面倒くさい」,「面白くない」と思わないように配慮する必要がある。

このようなことから, 教材の選択, 独特な計算やコンピュータの活用, 用語に対する概念の形成, 言葉による表現の仕方など, 授業を展開する上で多様な配慮や注意が必要になると考えられる。また, 教科書等の周辺にある面白い問題を提示することが重要な意義を持つことになる。

以下の記述では, 教科書や補助教材に述べられていることはなるべく省略している。それらでは書ききれていない部分に焦点を合わせる。したがって, 場合によっては何の説明もなく例題を考えたり, その問題が難しかったりすることもある。

新学習指導要領に沿ってこれを書いたつもりであるが, 私達が考える「問題点」や「面白さ」に, 個々の教師が感じるものとはずれがあるかもしれない。したがって, すべてが受け入れられることを期待していない。読者の授業のやり方に合ったものがあれば, その部分を取り入れてもらえればよいと思っている。

次の第 2 節では, 確率の導入に始まりいくつかの公式を説明をする。第 3 節では, 全国学力テストに出されたある確率の問題と, それに類似した問題を考えていく。第 4 節では, 母集団と標本についていくつかの例題を考える。第 5 節は「まとめ」に充てられている。

2.　確率

「確率」は生徒にとって初めて出会う教材である。内容は新学習指導要領でもあまり変わっていない。確率の概念自体が簡単ではないこと, 用語や表現 (事象 A の起こる確率を $P(A)$ と表すことなど) が教科書にないこと, 樹形図と結びつくと確率を考える範囲が大きく広がることなど, 注意すべき点が多い。

2.1　起こりやすさを表す量

教科書では例えば, 2 枚の硬貨やさいころを 1000 回位投げて「1 枚は表 1 枚は裏」となる割合や「1 の目」が出た割合を調べることから確率を導入している。ここでは袋の中の赤球と白球を取りだす実験を通して帯グラフを使った導入を試みる。その方が, 確率とは割合であることをより直感的に理解できると考えた。

例 2.1. 次の実験を行って「起こりやすさの程度」を調べる。

$\boxed{\text{実験 1}}$ 袋の中に同質の赤球 7 球と白球 3 球を入れておく。この割合を知らない生徒が 1 個を取り出して出た球の色を記録して元の袋に戻す。これを 100 回行った後に, 赤球と白球が何個づつ入っていたかを話し合う。

このことから

$$(\text{赤球が出た割合}) \fallingdotseq \frac{(\text{赤球の個数})}{(\text{全体の球の個数})}$$

となるであろう。(赤球が 65 から 74 回取り出される確率は 0.7 くらいとなった。)

赤球が出る「確率」次のように考える。

$$(\text{赤球が出る確率}) = \frac{(\text{赤球の個数})}{(\text{全体の球の個数})}$$

例 2.2. 袋の中に赤球と白球がある。1 個を取り出すとき, それが赤球である確率を次の場合に求めなさい。

(1)　赤球が 7 個と白球が 3 個の場合

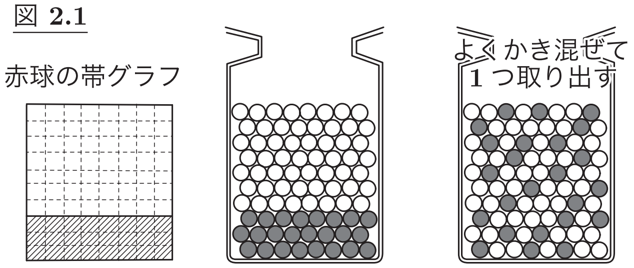
(2)　赤球が 700 個と白球が 300 個の場合

解　求める確率を p と表す。

(1) $p = \dfrac{7}{7+3} = 0.7$　(2) $p = \dfrac{700}{700+300} = 0.7$　□

次の図 2.1 は確率が割合で定められることを示している。

図 **2.1**



教科書にもどり, 球の個数の割合だけでなく, ある出き事が起こった回数の割合を表す場合も確率が使えることを学習する。

例　**2.3.**　みどりさんのグループではさいころを 1000 回投げて 1 あるいは 2 の目が出た回数を記録し, 次の表 2.2 を作った。

表 **2.2**

投げた回数	50	100	150	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1, 2 が出た回数	12	38	56	73	107	149	179	206	235	270	302	333
1, 2 が出た割合	0.24	0.38	0.373	0.365	0.357	0.373		0.343		0.338	0.336	

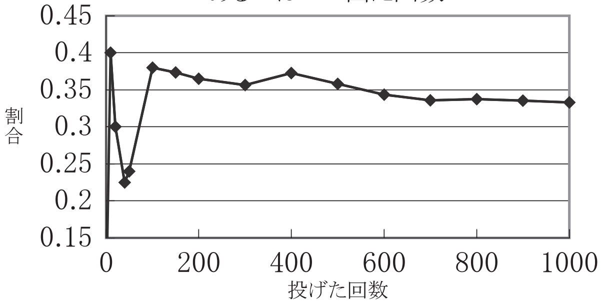
(1)　表の空欄に割合を計算して書き入れなさい。

(2)　次の図は表 2.2 に 0, 10, 20, 40 回目の結果を加えてグラフに表したものです。この表の結果から

$$(1\text{ あるいは }2\text{ が出る確率}) = \frac{1}{3}$$

と考えてよいか。

図 **2.3**



実験や観察で起こることができる個々の結果を簡単に「結果」とよび, 共通の性質をもった 1 つ以上の結果の集まりを「出き事」とよぶことにする。(ある教科書では後者を「ことがら」とよんでいる。専門用語ではそれぞれ, 「根元事象」や「事象」に相当する概念である。)

例 2.1 と例 2.3 において, ある出き事が起こる確率を p とすると次の式が成り立つ。

(P1)　一般に　$0 \leqq p \leqq 1$ であり,

(P2)　必ずその出き事が起こるとき　$p = 1$

(P3)　その出き事が決して起きないとき　$p = 0$

問　**2.1.** 次の出き事が起こる確率を求めなさい。

(1) さいころを投げるとき 1 から 6 までの目が出る確率

(2) さいころを投げるとき 7 の目が出る確率

(3) 赤球が 3 個, 白球が 4 個入った袋の中から 1 個を取り出すとき, 赤球あるいは白球が取り出される確率

(4) 52 枚のトランプの札の中から 1 枚を取り出すとき, それが白札 (何も書いてない札) である確率

2.2　確率の求め方

教科書と重複のきらいはあるが, 「同様に確からしい」を私たちの言葉で説明しておく。

さいころを投げたり, 袋の中から 1 個の球を取り出すときのように, 起こることができるすべての結果の, どの 2 つを比べても一方が他方より起こりやすいとは考えることができないとき, すべての結果は同様に確からしいという。

この節では「同様に確からしい 」場合だけを考える。

ある実験で起こることができる結果が n 通りあり, それらがすべて同様に確からしいとき, それぞれの結果が起こる確率はすべて $p = \dfrac{1}{n}$ に等しい。
また, ある出き事 A が a 個の結果からできているとき A が起こる確率は $p = \dfrac{a}{n}$ となる。

(なぜならば, どれかの結果が起こる出き事の確率は (P2) により $p = 1$ である。いま, 2 つの異なる結果が起こる確率をそれぞれ p, q とすれば, 同様に確からしいから $p = q$ である。このことから, n 通りの結果はすべて等しくなるから, どの結果が起こる確率も $p = \dfrac{1}{n}$ となる。)

問　**2.2.** 次の出き事が起こる確率を求めなさい。

(1) さいころを投げるとき 3 以下の目が出る確率

(2) さいころを投げるとき偶数の目が出る確率

(3) 袋の中に赤球が 3 個, 白球が 4 個, 黒球が 5 個あるとき, 1 個を取り出したときに赤球が取り出される確率

(4) 52枚のトランプの札の中から1枚を取り出すとき, それが絵札である確率

下記の性質 (P4), (P5), (P6) を導こうとすれば, 次の議論が必要となる。(P5) は確率の加法性とよばれる。

2つの出き事 A と B について, 一方が起これば他方は起こらないとき A と B は同時には起こらないという。

問　**2.3.** 次の 2つの出き事 A と B は同時に起こるか, 同時には起こらないか。

(1) さいころを投げるとき偶数の目が出る出き事を A, 奇数の目が出る出き事を B とする。

(2) さいころを 2回投げるとき 1回目に1の目が出る出き事を A, 2回の目の合計が 7となる出き事を B とする。

(3) 袋の中に赤球が 3個, 白球が 5個あるとき, 1個ずつ 2回取り出すとする。1回目が赤球である出き事を A, 2回とも赤球である出き事を B とする。

ある実験で起こりうる結果は n 通りあり, 出き事 A は a 通り, B は b 通りあるとする。A の起こる確率は $p=\dfrac{a}{n}$, B の起こる確率は $q=\dfrac{b}{n}$ となる。

A あるいは B の起こる確率を r とする。A あるいは B が起こるということは, a 通り b 通りと数えたどれかの結果が起こることだから

$$r \leqq \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = p+q \tag{2.1}$$

となる。出き事 A, B が同時には起こらないとすると, A, B 両方で重複して数えられた結果はないので, (2.1) で等号が成り立つ。以上をまとめると次の公式が導かれる。

(P4)　一般に $0 \leqq r \leqq p+q$ が成り立つ。

(P5)　A と B が同時には起こらないとき

$$r = p+q \leqq 1$$

が成り立つ。

(P5) で A がおこらない出き事を B とすると $r=1$ となるので次の (P6) が成り立つ。

(P6)　A が起こらない確率は $1-p$ である。

[注意 2.1] 一般に確率を求める問題を解くときの手順は次のようになる。

(1) 起こることができる結果を列挙する。

(2) (1) のそれぞれの結果に, 題意にあった確率を付与する。(これらの確率の和は 1 となることに注意する。)

(3) 必要ならば, (1), (2) で求めた (結果, 確率) の組を表, 樹形図, 図などを使って表す。

(4) 求める出き事に該当する結果の確率の和を求めて答えとする。

問　**2.4.** (1) 硬貨を 2回投げるとき表が 1回以上出る確率を求めなさい。

(2) 袋の中に赤球が 3個, 白球が 4個, 黒球が 2個あるとき, 1個を取り出したときに赤球ではない確率を求めなさい。

(3) 2つのさいころを投げるとき, 目の和が 3となる確率と 4となる確率を求めなさい。

問　**2.5.** ある町で A 新聞を購読しているの世帯は 45 パーセント, B 新聞を購読しているの世帯は 50 パーセントです。両方とも購読している世帯は 8 パーセントです。いまこの町で一世帯を無作為に選ぶとき, 両方とも購読していない世帯が選ばれる確率を求めなさい。

[注意 2.2] [注意 2.1] の (1) で結果が $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と列挙され, これらが同様に確からしいとする。さらに, $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n\}$ が起こらなかったという条件があれば, $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ は同様に確からしく, それらが起こる確率の和は 1 である。これより, それぞれが起こる確率は $p=\dfrac{1}{m}$ となる。(次の例題 2.4, 問 2.6 参照。)

例　**2.4.** 2 枚の硬貨が衝立(ついたて)の向こうで投げられた。あなたはその結果を見ることはできないが,「2 枚のうち少なくとも 1 枚が表である」ことを知らされた。このとき 2 枚とも表である確率を求めよ。

解　この実験によって起こりうる結果は

$$x_1 = (\text{表},\ \text{表}),\quad x_2 = (\text{表},\ \text{裏}),$$

$$x_3 = (\text{裏},\ \text{表}),\quad x_4 = (\text{裏},\ \text{裏})$$

の 4通りで, それらは確率 $\dfrac{1}{4}$ で起こる。

2 枚のうち少なくとも 1 枚が表である出き事を B とすると $B=\{x_1, x_2, x_3\}$ となり, これらは同様に確からしいから求める確率は $p=\dfrac{1}{3}$ となる。 □

例 2.4 とよく似た次の問題がある。(西川 [9] 参照。)

問　**2.6.** ある人に 2 人の子供があり, そのうち 1 人は男の子であることが分かっている。2 人とも男の子である確率を求めよ。ただし, 男女の生まれる確率は共に $\dfrac{1}{2}$ とする。

答えは例 2.3 と同様にして $\dfrac{1}{3}$ でよい。 □

[注意 2.3] 同様に確からしいという性質を使うと答えは分数で求められる。しかし，確率を活用する場面では小数で表した方が便利な場合が多い。

2.3　場合の数と確率

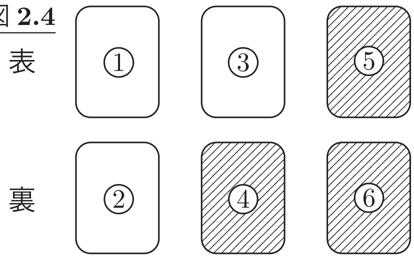
例　**2.5.** 場合分けを考える動機を与えるものとして次の実験を行う。

実験２　３枚のカードの表と裏を見せる。１枚目は両面が赤色であり, ２枚目は両面が青色であり, ３枚目は片面が赤でもう片面が青色である。これを重ねて面を裏返すことも許してよく切り, １枚を取り出して片面を提示する。提示したカードの裏の面の色を当てさせる。

その色が当たれば１点, はずれれば０点とする。これを記録に取り 12 回程度くり返す。７点以上は合格とする。当てるための方法やその確率を考える。

考え方　(i) ３枚のカードを図示すると次の図 2.4 のようになる。各面に１から６までの番号を振り, 1, 2, 3 は赤色, 4, 5, 6 は青色とする。

図 2.4



(ii) いま赤色が提示されたとすれば, 図 2.4 の 1, 2, 3 のどれかである。その裏側の色を見ると赤が２回, 青が１回の割合となる。青色が提示されたときも同様だから, 提示された色と同じ色が確率 $\frac{2}{3}$ で起こる。 □

私達の経験では, 多くの回答者 (学生) が $\frac{1}{2}$ と思うようで, ７点以上は半分もいない。

少し数え方の変わった場合分けの例として次の問いを挙げておこう。([6] 参照。)

問　**2.7.** カプセルの中に赤と白のビー球を２つづつ入れて振る。ふたを開けて見るとビー球は下図 2.5 のように A: 同色並び型あるいは B: 対角型の２通りに並ぶ。それぞれのおこる確率を求めなさい。

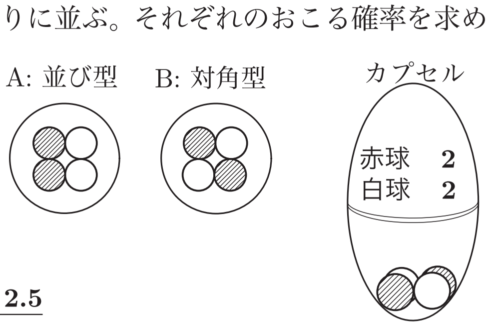


図 2.5

場合の数は数え上げていくのが基本であろう。「ダランベールの誤り」のように場合の数を確率と混同しないように注意する。

次の３つの例は公式としてまとめられるものを挙げている。

例　**2.6.** ６つのサッカーチームがゲームをして優勝チームを決める。次のようにゲームをするとき, 全体で何ゲームをすることになるか。

(1) 勝ち抜き戦(トーナメント)で行い, 勝ち残ったチームを優勝とする。

(2) すべての組合せで１回だけゲームを行う。(リーグ戦。) ただし, 勝率が同じでも優勝決定戦を行わないものとする。

解　(1) １ゲームを行うごとに１チームが負けていく。５つの負けチームと１つの全勝チームを決めるのだから５ゲームをすることになる。

(2) 次の表を作ると求めるゲーム数は $5+4+3+2+1=15$ となる。

表 2.6

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

□

例　**2.7.** ある班は６人の生徒からできている。

(1) ２人の代表者を決めるとき何通りの決め方があるか。

(2) 班長と副班長を決めるとき何通りの決め方があるか。

解　(1) 例 2.6 の (2) と全く同じように考えることにより 15 通りである。

(2) 班長の決め方は６通りある。副班長の決め方は, 残った５人の中から決めるので $6 \times 5 = 30$ 通りの決め方がある。 □

例 2.7 で３人を選ぶ場合には表 2.6 が使えないから急に難しくなる。

例　**2.8.** ある班は６人の生徒からできている。

(1) ３人の代表者を決めるとき何通りの決め方があるか。

(2) 班長と副班長と記録係を決めるとき何通りの決め方があるか。

解　(1) 例 2.7 の (1) と同じようにはできない。６人の中から勝手に１人を取り除いて考える。この１人を A とよぼう。A 以外の５人から２人の代表者を決めと例 2.7(1) と同様に考えると 10 通りの決め方がある。これに A を加えて, A を含む３人の代表者が 10 通り決まる。

A を除く５人から３人の代表者を選ぶことは, ５人を３人と２人に分けることだから, ５人から２人の代表者でない人を選ぶことと同じである。よって, この場合も 10 通りある。

以上より, A を含む３人の代表者は 10 通り定まり, A を除く３人の代表者が 10 通り定まるので, 全体は 20 通りの決め方がある。

(2) 例 2.7 の (2) と同じように考えると $6 \times 5 \times 4 = 120$ 通りとなる。

(1) の別解　(2) を先にやって 120 通りとなる。ところで班長と副班長と記録係の区別がないので この 3 つには順番を決める必要がない。3 つの異なるものの並べ方は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りだから求める選び方は $120 \div 6 = 20$ 通りとなる。　□

場合の数や確率を扱うとき樹形図は, どんな問題にも応用できて便利である。しかし, 常に最もよい方法とは限らない。また, 教科書では場合の数と確率を同時に考える場合を控えているようである。

どの教科書にも「くじを引く順番は当たる確率に影響しない」ことを示している。次の例 2.9 はその一種である。

例　**2.9.**　当たりとはずれが 2 本ずつあるくじがある。いま A, B の 2 人が A, B, A, B の順に元にもどすことなくこのくじを引くとする。

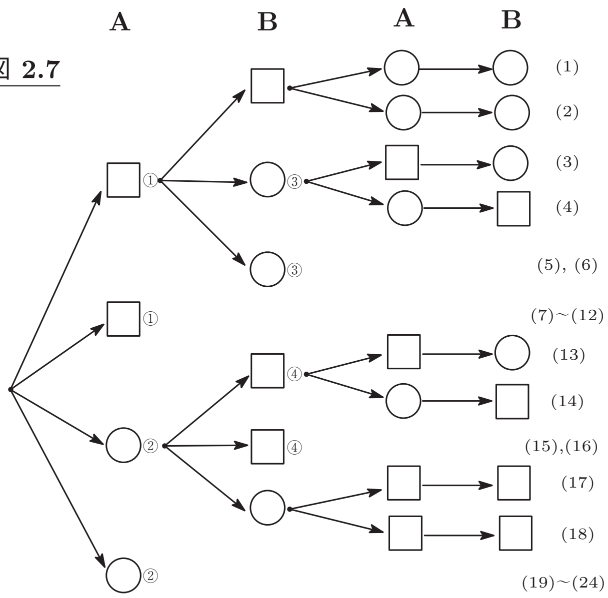
(1)　A が当たりくじを 2 本引く確率を求めなさい。

(2)　B が当たりくじを 2 本引く確率を求めなさい。

(3)　A と B が当たりくじを 1 本ずつ引く確率を求めなさい。

解　当たりくじを□と表し, はずれくじを◯で表して, 下記の樹形図 2.7 を描く。図の, ①, ②, ③, ④は同じ枝を持つので一方を省略している。

図 2.7



引く回数が進むに連れてくじの本数は減少する。4 本のくじをすべて区別して考えているから結果は $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通りあることになる。

(1) A が当たりくじを 2 本引くのは, □①の中に 2 回現れる。(結果 (3) と (5))　□① は図の中に 2 回現れる ((3), (5) に対応する (9) と (11)) ので, 求める確率は $\dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$ である。

(2) B が当たりくじを 2 本引くのは, ◯②の中に 2 回現れる。(結果 (14) と (16)) これより (1) と同様に考えると, 求める確率は $\dfrac{1}{6}$ となる。

(3) A あるいは B が必ず当たりくじを引くので, 求める確率は $1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$ となる。　□

同じ実験を繰り返すときには, 樹形図よりも表を作った方が簡単になる場合が多い。

例　**2.10.**　さいころを 3 回投げるとき目の和が 9 になる確率と 10 になる確率を求めなさい。

解　(1) 3 回投げるとき目の出方は $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ 通りある。1, 2 回目の目の和を a, 3 回目の目を b とおく。目の和が 9 になる場合を考えると次の表を得る。(目の和が 10 になる場合も考えて $a = 9$ のときの欄 $(*)$ を表に加えた。)

表 **2.8**

a	a となる 1, 2 回目の結果	個数	b
3	(1, 2) (2, 1)	2	6
4	(1, 3) (2, 2) (3, 1)	3	5
5	(1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1)	4	4
6	(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)	5	3
7	(1, 6) (2, 5) (3, 4) (4, 3) (5, 2) (6, 1)	6	2
8	(2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2)	5	1
9	(3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3)	4	$(*)$

表 2.8 より目の和が 9 になる確率を p とおくと

$$p = \frac{1}{216}(2+3+4+5+6+5) = \frac{25}{216} \fallingdotseq 0.1157$$

目の和が 10 になる確率を q とおくと, 表 2.8 の b 欄で 6 から 1 が 1 段下がって a 欄の 4 から 9 に対応するので

$$q = \frac{1}{216}(3+4+5+6+5+4) = \frac{27}{216} = 0.125$$

となる。　□

3.　全国学力テストの問題

この節では確率に関する問題を 2 題考える。確率に興味をもち応用力をつけることがねらいである。長文の説明のついた PISA 風の問題を選んだ。

平成 21 年 4 月に文部科学省の行った全国学力テストの中学校「数学 B」(主として活用に関する問題) の問題 $\boxed{5}$ は興味深いものがあった。大変長い考え方のヒントを与えていて, 本質的には少し難しい条件付き確率の問題を, 基礎的な確率を含む論理的思考力の問題に直していたからである。

私達が知る限りではこれはブロム他 [10] にある

問題の改作である。本当にあったテレビ番組が元になっていて, 視聴者が答えを投稿しているのだが, 正解は大変少なかったと伝えられている。私達の実験でも正解は少ない。

ここでは, 全国学力テストの問題と [10] との中間程度の確率の問題に作り直して考えよう。

例 **3.1.** あなたはテレビの視聴者参加番組の「賞品当てゲーム」に出場しています。あなたの横には司会者がいて前には 3 つの閉じた扉があります。その扉の中の 1 つには乗用車, 他の 2 つにはヤギが入っています。司会者はどの扉に乗用車が入っているのかを知っています。

このゲームは次のように進行します。

① あなたは, 最初に 1 つの扉を選びますが, 中を見ることはできません。

② 司会者は, 残った 2 つの扉のうち, ヤギが入っている扉を 1 つ開けて見せます。

③ あなたは, 最初に選んだ扉について「扉を変更する」かあるいは「扉を変更しない」かのいずれかを選択します。

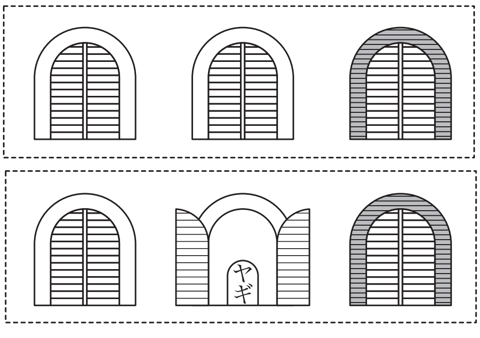
乗用車を当てたいときに, あなたは扉を変更した方がよいかあるいは変更しない方がよいかを考えます。

次の図 3.1 の上段は, 上の ①の時点での図です。網掛けをしている扉が乗用車が入っている扉ですが, 出場しているあなたには分かりません。

図 3.1 の下段は, ②の時点での図です。あなたが選んだ扉以外でヤギが入っている扉を 1 つ開けたところです。

最後に司会者は 3 つの扉のすべてを開けて見せるのですが, その図は省略されています。

図 **3.1**



あなたが最初に選んだ扉にヤギが入っている場合と乗用車が入っている場合があります。この 2 つの場合を考えに入れて, 次の問いに答えなさい。

問 **1** 「扉を変更しない」ときに, 乗用車の扉を選ぶことのできる確率を求めなさい。

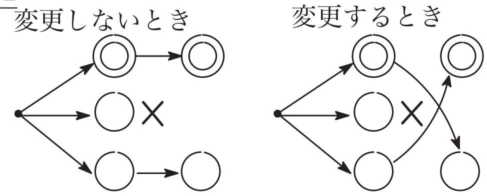
問 **2** 「扉を変更する」ときに, 乗用車の扉を最後に選ぶ確率を求めなさい。

問 **1** の解 最初に乗用車の扉を選ぶことのできる確率は $\frac{1}{3}$ である。「扉を変更しない」ときには, 司会者の扉の開け方と確率には関係がない。よって, 求める確率は $\frac{1}{3}$ である。

問 **2** の解 最初にヤギの入っている扉を選ぶ確率は $\frac{2}{3}$ である。

図 3.2 は一種の樹形図を表す。ここで ◎は乗用車の入っている扉, ○はヤギの入っている扉, ×は司会者が途中で開けた扉を示す。

図 **3.2**



最初にヤギの扉を選んでいて「扉を変更する」場合には, 必ず乗用車の扉を選ぶことができる。最初に乗用車の扉を選んでいて「扉を変更する」場合には, 必ずヤギの扉を選ぶことになる。これより求める確率は $\frac{2}{3}$ である。 □

長い問題文をもつ問題をもう 1 つ与えよう。[8] の問題を改作した。樹形図の考え方について教科書の範囲を少し超えているかも知れないが, できて欲しいものである。

問 **3.1.** 昔々に栄えたオズの国では次のような裁判がありました。簡単のために裁判長を A, 裁かれる人を B とよぶことにします。

A は, 見かけが全く同じつぼを 2 つと赤球 3 個, 白球 3 個を準備します。B は, すべての球を 2 つのつぼに入れます。入れ方は B の自由で, 例えば一方のつぼが空であっても, 2 つのつぼに赤球と白球を区別して入れてもかまいません。

A は, B の見ていないところで 2 つのつぼを適当に入れ替えて置いておきます。B は, 2 つのつぼのうち 1 つを選び, その中から 1 個を取り出します。もちろん, B はつぼを選ぶまではそれに触ってはいけませんし, 球を取り出すときには目隠しをしなければいけません。

見事白球を取り出すことができれば B は無罪, 赤球を取り出したりつぼが空だったりした場合には有罪となります。

問 **1** 一方のつぼにすべての球を入れ他方のつぼを空にしたとき, B が無罪となる確率を求めなさい。

問 **2** 両方のつぼに必ず赤球と白球の両方をいくつか入れるとき, B が無罪となる確率を求めなさい。

問 3　B が無罪となる確率を最大にしたいとき, 赤球と白球をどのようにつぼに入れるとよいか。また, そのときの確率を求めなさい。

4.　母集団と標本

新学習指導要領では, 標本調査の必要性と意味を理解するだけではなくて, 標本を使って母集団の傾向を説明することや簡単な場合について標本調査を行うことになっている。読むと難しく感じられるが, 補助教材などで考えられている内容はそれ程ではない。

4.1　標本調査

学習指導要領に記されたキーワードは「全数調査」だけであるが, 次の用語はどの補助教材でも使われている。私達の解釈も付け加えておく。

母集団 : 調査の対象となる集団の全体

標　本 : 母集団の性質を調べるために取り出された母集団の一部分で, 調査者はこれから資料を得る

標本の大きさ : 母集団から取り出された標本の個数や資料の数値の個数

無作為抽出 : 母集団から標本を取り出すとき, かたよりのないように取り出す方法

乱数 : 0 から 9 までの数字がそれぞれ $\frac{1}{10}$ の確率で現れる不規則な数値の列を 0 から 9 までの一様乱数といい, ここではそれを単に乱数とよぶ

標本調査 : 標本を使って母集団の性質を調べる調査法

全数調査 : 標本を使わずに, 母集団全体を調べる方法　このとき資料は母集団から得られる

統計調査には目的がある。全数調査か標本調査かは目的や調査者がおかれた状況によって決まる。

全数調査は, 対象を正確に知る必要があるときや, 結果が重要な意味をもつ場合に行われる。母集団が大きい場合には, 時間, 費用, 労力が多く必要になる。

標本調査は全数調査に比べて手軽にできる。正確さがそれほど必要でないとき, 結果が早く欲しいとき, あるいは標本調査しかできないときもある。

例　**4.1.** 次の調査は全数調査, 標本調査のどちらですか。

(1) テレビ局が行う番組の視聴率調査
(2) 政府の国勢調査
(3) 県が行う川の水質検査
(4) メーカーが行う車のタイヤの寿命調査
(5) 学校での健康診断
(6) 新聞社が行う政党支持率の調査
(7) 中学校の先生が行う生徒の出欠調査

例 4.1 のような問題では, 目的を書くと長文になるから, その代わりになるべく調査主体を書いて考えやすくした方がよい。

4.2　標本調査の方法

母集団から無作為に標本を取り出すためには乱数が用いられる。次のような方法で乱数を得ることができる。

(1) 乱数さいを投げる, (2) 本の乱数表を見る, (3) コンピュータで発生させる。

「乱数とは何か」という問いに正確に答えることは大変難しい。第 4.1 節の説明よりも少し詳しいものを与えておこう。

1 回操作をすると 0 から 9 までの数字の 1 つが確率 $\frac{1}{10}$ で現れる装置がある。この装置を続けて操作することによて現れる数字の列を記録したもの。

[注意 4.1] 正確には「互いに独立」という言葉を使うべきであるが, その意味を「装置」という言葉に込めている。

例えば乱数を 100 個取り出したとき, その中に偶然 $\cdots 0123456789 \cdots$ という数字が並ぶことは確率的にはありうることだから, このことからこの 100 個の数字は「乱数ではない」とは言えない。しかし, この 100 個を使って標本抽出を行うことはよくないと思われる。

乱数は手軽に採取できるものであるから, 取り直すべきである。統計では誰が見ても正しいと思われる結果を導くことが重要と思われる。その意味で上記の 100 個を使って標本抽出を行うと「インチキ標本」と疑われる可能性がある。そうなればすべての苦労が台無しになる。

標本抽出では, 乱数の採り方や処理の仕方は明確に説明できる方法で行うべきである。実際にはそのような説明を行う機会は大変少ないのであるが, そうすることが数理的精神と言うものであろう。

次の例は乱数の理解を明確にするためのものである。また, 確率の応用にもなっている。

例　**4.2.**　普通のさいころを投げて次の結果を得た。これを使って 0 から 9 までの乱数を作りなさい。

$$4\ 1\ 2\ 3\ 1\quad 6\ 4\ 5\ 1\ 3\quad 2\ 2\ 4\ 6\ 5$$
$$3\ 3\ 1\ 2\ 2\quad 3\ 2\ 3\ 4\ 4$$

解　(1) 2 つごとに区切って次の 2 桁の数値を作る。

$$4\,1,\ 2\,3,\ 1\,6,\ 4\,5,\ 1\,3,\ 2\,2,$$
$$4\,6,\ 5\,3,\ 3\,1,\ 2\,2,\ 3\,2,\ 3\,4 \tag{4.1}$$

表 **4.1**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	/	104	90	97	101	110	101	103	107	111
10	95	112	99	90	95	83	84	107	91	94
20	94	87	94	95	97	102	106	89	99	114
30	96	105	93	96	86	90	101	88	96	100
40	99	90	95	90	94	106	104	97	90	92
50	96	105	102	83	107	103	102	96	98	86
60	100	90	106	95	96	96	99	98	104	97
70	101	93	96	93	95	93	91	98	86	105
80	94	104	91	104	87	101	107	95	93	110
90	102	94	104	92	98	102	105	99	102	98
100	96	101	94	102	110	89	98	85	95	102
110	106	94	103							

表 **4.2**

3	97	-3
8	107	7
19	94	-6
23	95	-5
39	100	0
62	106	6
67	98	-2
82	91	-9
108	95	-5
111	94	-6
計		-23

(2) 1 の桁に 6 が来ればその 2 桁の数を取り除く。

４１, ２３, ４５, １３, ２２,
５３, ３１, ２２, ３２, ３４ (4.2)

(3) 10 の桁が奇数であれば, 1 の桁をそのまま書く。10 の桁が偶数であれば, 1 の桁に 5 を加えた数字を書く。ただし, 10 となるときは 0 と書く。

６８０３７３１７２４ (4.3)

を得る。これが求めるものである。

この例で求めた（4.3）の各数が確率 $\frac{1}{10}$ で現れた結果となっていることを確かめよう。

(a) （4.1）の 2 桁の数は 36 通りが可能となる。

(b) （4.2）の数は 16, 26, 36, 46, 56, 66 が取り除かれて 30 通りが可能となる。

(c) 例えば, (4.3）において 1 がえられる（4.2）の性質をもつ数は 11, 31, 51 の 3 通りだけである。また, 6 がえられる（4.2）の性質をもつ数も 21, 41, 61 の 3 通りである。
同様に 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 0 がえられる（4.2）の性質をもつ数もそれぞれ 3 通りとなる。

(d) これにより（4.3）で 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の各数がえられる確率は $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ となる。 □

確率が $\frac{1}{10}$ となることから, 求めた数の系列は乱数と考えてよい。

4.3 標本調査の応用

補助教材の例題では, 池の魚の数を標本から推定したり, 辞書の見出し語の数を一部を調べて推定するなどの問題が多い。

補助教材よりも少し実際的な例を考えよう。長い問題になっているが, 本質的には 2 つの部分に分かれている。

例 **4.3.** (A) 生物部が育てていた校庭のみかんを 112 個収穫しました。みんなで重さを量り, 番号を付けて次の表 4.1 を作りました。(スペースの関係でこのページ上段に掲げた。)

たけしさんは 1 から 112 までの乱数の中から次の 10 個の数を無作為に選びました。

3, 8, 19, 23, 39, 62, 67, 82, 108, 111 (4.4)

問 **1** この 10 この数を使ってみかんの標本を選び, 平均を求めなさい。

問 **2** 後に生物部が発表した表 4.1 の 112 個のみかんの平均は 97.5 グラムでした。問 1 の平均とどの位違いますか。

(B) たけしさんが採った（4.4）の数は次のようにして求めました。

(1) 教科書の乱数表から連続した数を採り, 3 桁ごとに区切りました。

(2) これらの数の中で 896 以上の数があれば取り除き, それ以外の数を 112 で割った余りを求めました。

(3) 余りが 0 になると 112 に書き改め, 前に出てきた数と同じ数が出てくれば取り除きました。

(4) (3) で求めた 10 個の数を小さい方から並べ替えました。

問 **3** たけしさんが教科書から採った乱数は次のものでした。

33280 79581 15739 68019
43755 79783 51062

これに上記の (1) から (4) を適用して (4.4) を導きなさい。

問 **4** (4.4) の 10 個の数はそれぞれ確率 $\frac{1}{10}$ で採られていると言えますか。例 4.2 を参考にして答えなさい。

[注意 4.2] 例 4.3 の問 1 で平均を求めるときは計算機あるいは電卓を使う。それらを使わない場合には次のようにする。

(1) 平均はだいたい 100 位だろうと見当をつけ, 各数から 100 を引いた数を作り, その平均を導く。(表 4.2 (このページ上段) 参照。)

(2) (1) で求めた平均に 100 を加えて求める平均とする。

$$(\text{平均}) = 100 - 2.3 = 97.7$$

第 1 節 (4) で述べたように, まともに計算するのは勧められない。

[注意 4.3] 1 から 100 までの数からいくつかの乱数を採るのはやさしい。補助教材ではそのような場合を考えている。ここではわざと 112 という半端な数をとって一般的に考えた。

計算機で乱数を採ってくる場合には, たけしさんの方法のように複雑にはならない。単に

INT(RAND()*112)+1

としてよい。

5. あとがき

(1) 前回の論文 [7] は, いく人かの中学校の先生から「難しすぎる」という批評を受けた。今回も同じ批評を受けそうなものになってしまった。もちろん教科書や補助教材に書いていることが基本である。それを踏まえた上でここに書いたものも参考にしてほしいと考えている。

(2) この領域は, 電卓やコンピュータの利用に最もなじみやすい領域であろう。しかし, その詳細については現場に任されていて新指導要領にも書いていない。この論文でもそのことに触れなかった。まだ大きな問題を残している。

(3) 新指導要領の示す内容が, この領域の各単元についてどの程度のものなのかがあいまいな部分もある。しかし, 教科書や補助教材ではどれも同じ程度と広がりをもって書かれている。文部科学省の教科書検定については知らないが, 今後その内容が新指導要領のもとでも部分的に変わり得る可能性はあると思われる。

謝辞.　本稿を作成する過程で, 付属中学校の中村正樹先生, 竹荘中学校の葛原義晃先生, 開智高校の水口貴史先生に貴重なご助言をいただきました。深く感謝いたします。

参　考　文　献

[1] 岡本和夫他著, 未来へひろがる数学 [2], 平成 21 年度用教科書および 22 年度用補助教材, 啓林館.

[2] 重松敬一他著, 中学数学 2, 平成 21 年度用教科書および 22 年度用補助教材, 日本文教出版.

[3] 池田敏和他著, 中学数学 2, 平成 21 年度用教科書および 22 年度用補助教材, 学校図書.

[4] 文部科学省, 中学校学習指導要領, 平成 21 年 3 月.

[5] 文部科学省, 中学校学習指導要領解説, 平成 21 年 7 月.

[6] 岩田正樹, 「「新指導要領」における数学的活動を通して」, 数学教育, 明治図書, 608, 2008(49–53p).

[7] 木下淳子, 門田良信, 「「資料の活用」領域での教材研究」, 和歌山大学教育学部紀要 (教育科学), 60, 2010(25–33p).

[8] 榊 忠男, 「中学校の確率」, 小林善一他監修, 算数・数学教育実践講座 9 巻, 1985(65–74p).

[9] 西川信次, 「積事象 $A \cap B$ の捉え方について」, 日本数学教育学会誌 (数学教育), 第 70 巻 7 号, 1988(213–220p).

[10] G. ブロム, L. ホルスト, D. サンデル著, 森真訳, 「確率問題ゼミ」, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995(4–6p).

A research on teaching the field “active use of data” (Part 2)

—— corresponding to mathematics in the new course of study for second and third grade students of junior high school ——

Kainan city Shimotsu first junior high school　Junko KINOSHITA
Wakayama Univ.　Yoshinobu KADOTA

The culture and science ministry published the new course of study in 2008. They will put it into practice in 2012 after some transitional measures.

They will set up a new field “active use of data” in mathematics in junior high school as one of the important modifications.

This paper considers the purpose of the the new field and how to realize it in lessons. It is concerned with the second and third grade contents which are about probability and sampling survey respectively, since our previous paper[7] has already studied the first grade contents.

This paper points out that the field “active use of data” has rather different characteristics from the other mathematical fields, facing directly to our daily life. Students may be embarrassed by the differences, such as unfamiliar terminology, bothersome computing and vague definitions. Teachers should be attentive and considerate to lead them.

It studies mathematical concepts, materials and their applications which contribute to the classes. In addition, it gives many examples and exercises which are interesting and helpfull for students to understand the subjects.